Wykład
Elementy kombinatoryki, prawdopodobieństwo

dr Aneta Mikucka
Politechnika Koszalińska

-Elementy kombinatoryki

-Definicje prawdopodobieństwa

-Prawdopodobieństwo warunkowe

-Niezależność zdarzeń

-Prawdopodobieństwo całkowite

-Wzór Bayesa

-Schemat Bernoullie’go

Elementy kombinatoryki

Reguła mnożenia i dodawania

-Kolejność elementów jest ważna
lub
-Wybór polega na podjęciu n decyzji, a każda na k sposobów
Np. liczby utworzone z cyfr

Symbol Newtona

kombinacje- wybór *k* elementów z *n* elementów

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ale elementów nie jest ważna

Karty, kule nieponumerowane,

Silnia

gdy ustawiamy wszystkie elementy w ciągu jeden po drugim

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$$

Osoby w kolejce, książki na półce....

Kombinatoryka

Przykłady.

1. Na ile sposobów możemy ustawić 6 osób w kolejce do sklepu?
2. Na ile sposobów możemy ustawić w kolejce 4 dziewczęta i dwóch chłopców, tak, aby dziewczęta stały przed chłopcami?
3. Na ile sposobów możemy ustawić w kolejce 4 dziewczęta i 5 chłopców, tak, aby dziewczęta stały na przemian chłopcami?
4. Rzucamy monetą i trzy razy kostka sześcienną. Ile jest wszystkich wyników tego doświadczenia?

Kombinatoryka

5. Ile jest możliwych numerów pesel dla osób urodzonych 6 listopada 2023 r. ?

6. Ile różnych tablic rejestracyjnych typu   litera litera liczba liczba liczba liczba liczba liczba można utworzyć (XY000000 nie jest numerem) ?

7. Ile można utworzyć czterocyfrowych kodów pin jeśli kodem nie jest sekwencja 0000 ?

8. Ile jest liczb pięciocyfrowych złożonych wyłącznie z cyfr „0”, „2”, „5”?

9. Ile jest liczb pięciocyfrowych w zapisie których cyfry nie powtarzają się?

Kombinatoryka

10. Pięć osób stoi na dworcu kolejowym. Każda może wybrać jeden z trzech pociągów pośpiesznych. Na ile sposobów mogą to zrobić?

11. Jeden bar oferuje 6 zup i 10 drugich dań, a drugi bar oferuje 4 zupy i 5 drugich dań. Ile różnych zestawów jest do wyboru w każdym z tych barów?

12. Z talii 52 kart wybieramy 4 karty. Ile jest możliwości wyboru kart wśród których będą:

a)2 Asy   b) 2 Asy i 1 Król   c) będą co najmniej dwa kiery

Kombinatoryka

13. W kolejce do sklepu stoi 12 osób, wśród nich Ania i Basia. Ile jest możliwości ustawienia w kolejce tych osób, aby

a) Ania i Basia stały koło siebie b) pomiędzy Ania i Basia stały co najmniej trzy osoby?

14. Ze zbioru liczb naturalnych od 1 do 200 tworzymy 6-cio elementowe ciągi, w których liczby się nie powtarzają się. Ile utworzymy ciągów rosnących?

15. Ile jest liczb czterocyfrowych, gdzie cyfry nie powtarzają się

a) Dowolnych b) większych od 4000 c) parzystych d) podzielnych przez 5.

Kombinatoryka

16. Ile różnych słów, mających sens lub nie można utworzyć przestawiając litery w słowie

a) KOT b) LUNA c) KASA d) ABRAKADABRA

17. Na ile sposobów posadzimy 16 osób przy okrągłym stole?

18. Wśród 16 osób jest Ania i Basia. Na ile sposobów posadzimy 16 osób, aby Ania siedziała koło Basi?

19. Ile jest możliwości aby w czteroosobowej rodzinie co najmniej dwie osoby urodziły się w tym samym miesiącu?

20. Ile jest możliwości aby w czteroosobowej rodzinie dwie osoby urodziły się w tym samym miesiącu?

Kombinatoryka

17. Na ile sposobów posadzimy 16 osób przy okrągłym stole? 15!

18. Wśród 16 osób jest Ania i Basia. Na ile sposobów posadzimy 16 osób, aby Ania siedziała koło Basi?
14! X 2

19. Ile jest możliwości aby w czteroosobowej rodzinie co najmniej dwie osoby urodziły się w tym samym miesiącu? 8856

20. Ile jest możliwości aby w czteroosobowej rodzinie dwie osoby urodziły się w tym samym miesiącu?

15840

Określenie prawdopodobieństwa

Definicja 1.

Przestrzenią zdarzeń elementarnych *nazywamy niepusty zbiór Ω, a* ***zdarzeniem elementarnym*** *– jego pojedynczy element $\omega \in \Omega$.*

Przykład.

1. Rozważmy rzut kostką sześcienna do gry. Wówczas $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

   Zdarzenie A niech oznacza wyrzucenie liczby oczek mniejszej niż 4. Wtedy $A = \{1,2,3\}$.

1. Rozważmy rzut dwiema (różnymi) kostkami do gry. Wówczas

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (2,6) \\ (3,1), (3,2), \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (3,6) \\ (4,1) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots .. (4,6) \\ (5,1), \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . \dots (5,6) \\ (6,1), \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (6,6) \end{Bmatrix}.$$

Określenie prawdopodobieństwa

Oznaczenia

- Zdarzenie niemożliwe $\emptyset$
- Zdarzenie pewne Ω
- Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A to A', $A' = \Omega - A$
- Zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B, $A \subset B$
- Zdarzenia wykluczają się, $A \cap B = \emptyset$.

Określenie prawdopodobieństwa

Definicja (aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa)

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych, Z-borelowskie ciało zdarzeń utworzone z podzbiorów tej przestrzeni.

Prawdopodobieństwem zdarzenia A nazywamy pewna miarę $\mathrm{P(A)}$, która każdemu zdarzeniu $\mathrm{A}, \mathrm{A} \in \Omega$, przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $\mathrm{P(A)}$ w taki sposób, że

(A1) $\mathrm{P(A)} \geq 0$ (A2) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$

(A3) jeśli $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \Omega$ i $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$, to $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.

Warunki (A1), (A2), (A3) nazywamy **aksjomatami prawdopodobieństwa.**

Trójkę $(\Omega, \mathrm{Z}, \mathrm{P})$ nazywamy **przestrzenią probabilistyczną.**

Określenie prawdopodobieństwa

Definicja (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych.

Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to

prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu } A}{\text{liczba wszystkich zdarzen elementarnych}}$$

Określenie prawdopodobieństwa

Przykład.

1. Rzucamy dwa razy kostką sześcienna do gry. Jakie jest pr-wo, że suma oczek wyrzucanych w dwóch rzutach jest równa 6 ?
2. Rzucamy trzy razy monetą symetryczną, jakie jest pr-wo, ze co najmniej raz wyrzucimy orła?
3. W pudełku znajdują się 4 losy wygrywające i 6 przegrywających. Losujemy dwa losy. Oblicz pr-wo wylosowania
   a) Dwóch losów wygrywających , odp. 2/15
   b) Co najmniej jednego losu wygrywającego , odp. 2/3
4. W klasie jest 9 dziewcząt i pewna liczba chłopców. Wybieramy losowo dwie osoby z klasy. Pr-wo wybrania co najmniej jednej dziewczyny jest równe $\frac{6}{7}$. Ilu chłopców jest klasie? Odp. 6

Określenie prawdopodobieństwa

5. Mały chłopczyk przestawia losowo 4 klocki z literami A,A,M,A.

   Jakie jest pr-wo, że ułoży słowo MAMA?   Odp. 1/6

6. Cztery ponumerowane kule umieszczono w pięciu ponumerowanych szufladach. Oblicz pr-wo zdarzenia

   a) Wszystkie kule trafia do innej szuflady odp. 24/125

   b) Wszystkie kule trafią do jednej szuflady odp. 1/125

7. Na parterze bloku mającego oprócz parteru 6 pięter, wsiadło do windy 5 osób. Oblicz pr-wo, że

   a) wszystkie osoby wysiada na jednym piętrze odp. 1/1296

   b) każda osoba wysiądzie na innym piętrze odp. 5/54

Określenie prawdopodobieństwa

8. Z talii 52 kart losujemy 13. Oblicz pr-wo, że wylosujemy
   a) 3 piki, 4 kiery, 5 trefli
   b) Co najmniej 12 pików
   c) 4 kiery i co najwyżej 1 trefl
   d) Co najmniej 4 kiery

Określenie prawdopodobieństwa

Twierdzenie (własności prawdopodobieństwa)

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$

2. $P(\Omega) = 1$ oraz $P(\emptyset) = 0$

3. $P(A) \leq P(B)$, gdy $A \subset B$

4. $P(A') = 1 - P(A)$

5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

6. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$.

7. Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Omega$ wykluczają się parami, to $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

Przykłady – prawdopodobieństwo

Przykład.

1. Wiadomo, że $A, B \subset \Omega$, $P(A') = \frac{1}{4}, P(A \cup B) = \frac{7}{8}, P(A \cap B) = \frac{1}{8}$.

   Oblicz $P(A), P(B), P(A - B)$.

2. Wiadomo, że $A, B \subset \Omega$, $P(A) = 0{,}6$, $P(B') = 0{,}25, A \cup B \subset \Omega$.

   Oblicz $P(B), P(A \cap B), P(B - A)$.

3. Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Jakie jest pr-wo, że wylosowana karta jest asem lub pikiem?

Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja (prawdopodobieństwo warunkowe)

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, przy czym $P(B) > 0$.

Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A|B)$ zajścia zdarzenia A pod warunkiem, ze zaszło zdarzenie B nazywamy liczbę

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe – przykłady

Przykład.

1. Rzucamy dwa razy kostką sześcienna do gry. Jakie jest pr-wo, że w pierwszym rzucie otrzymamy mniejsza liczbę oczek niż w drugim rzucie, **jeśli wiadomo**, że w drugim rzucie wypadło 5 lub 6 oczek?
2. Z talii 52 kart losujemy jedna kartę. Jakie jest pr-wo, że wylosowana karta jest asem, **jeśli wiadomo**, że jest pikiem.
3. Oblicz $P(A|B)$, jeśli $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A) = \frac{1}{4}$.

Prawdopodobieństwo warunkowe – przykłady

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

4. Z talii 52 kart wybrano losowo dwie karty. Oblicz pr-wo, że będą to

a) Dwa Asy, jeśli wiadomo, że wybrano co najmniej jednego Asa

b) Dwa Asy, jeśli wiadomo, że wybrano Asa Pik.

Niezależność zdarzeń

Definicja (Zdarzenia niezależne)

- *Dwa zdarzenia* $A, B \subset \Omega$ *nazywamy **niezależne**, jeżeli zachodzi równość*

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)} \, .$$

- *Zdarzenia nazywamy **zależne**, jeżeli* $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

Niezależność zdarzeń– przykłady

1. Rzut kostką sześcienną do gry. Rozważmy zdarzenia:

   A – wyrzucona ilość oczek jest liczbą parzystą, B – wyrzucona ilość oczek jest większa od 2.

   Czy zdarzenia są niezależne?

Zdarzenia niezależne

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

2. Z talii 52 kart losujemy jedna kartę. Rozważmy zdarzenia:

A - Wylosowana karta jest pikiem,   B - Wylosowana karta jest asem.   Czy zdarzenia są niezależne?

3. Rozważmy trzykrotny rzut monetą symetryczną. Rozważmy zdarzenia:

A. Wyrzucenie co najmniej jednego orła i co najmniej jednej reszki

B. Wyrzucenie co najmniej jednego orła. Czy zdarzenia są niezależne?

Niezależność zdarzeń– przykłady

1. Do sygnalizacji czerwonego światła zużyto dwóch niezależnie działających od siebie sygnalizatorów. Prawdopodobieństwo awarii pierwszego z nich wynosi 0,01, a drugiego 0,02. Jakie jest prawdopodobieństwo awarii dokładnie jednego z nich?
2. Trzej strzelcy A,B,C strzelają niezależnie od siebie do tej samej tarczy. Prawdopodobieństwo ich trafień to P(A)=0,8, P(B)=0,7, P(C)=0,5. Oblicz prawdopodobieństwo, że

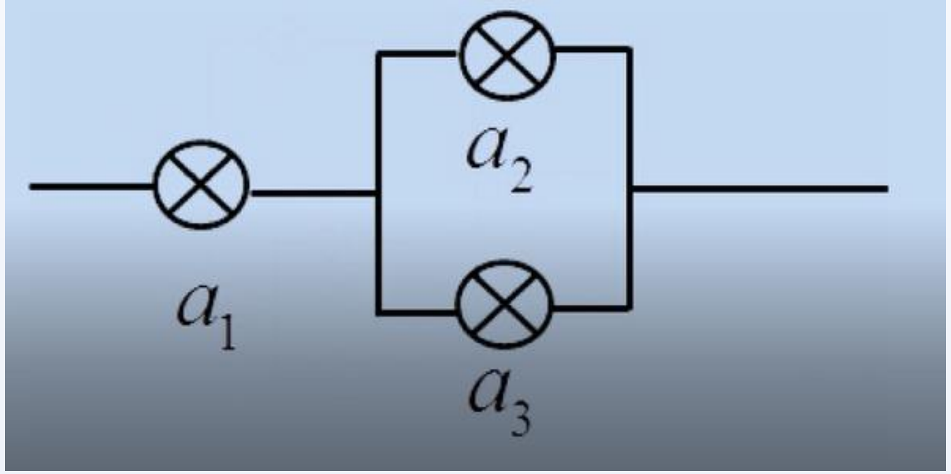
a) Tarcza zostanie trafiona raz

b) Tarcza zostanie trafiona dwa razy

Niezależność zdarzeń– przykłady

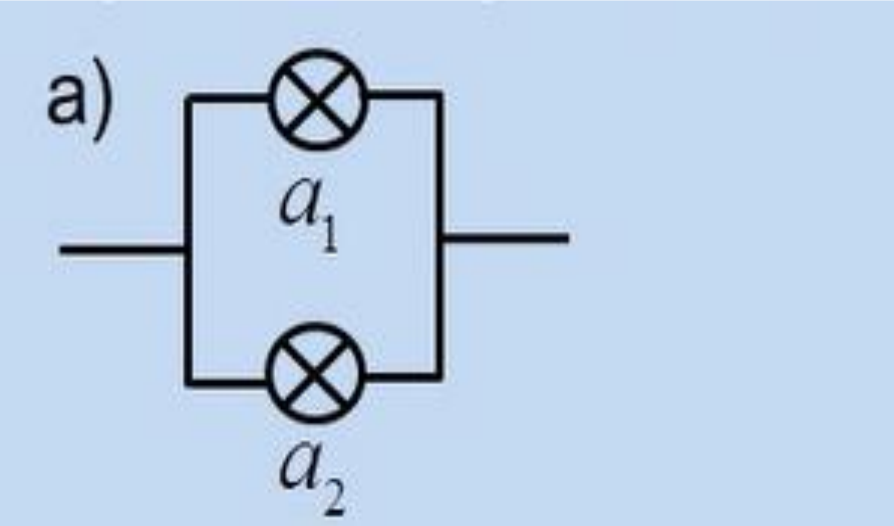
3. Przerwanie obwodu elektrycznego może nastąpić wskutek defektu elementu a_1 lub obu jednocześnie $a_2\ i\ a_3$. Prawdopodobieństwa defektu tych elementów wynoszą:

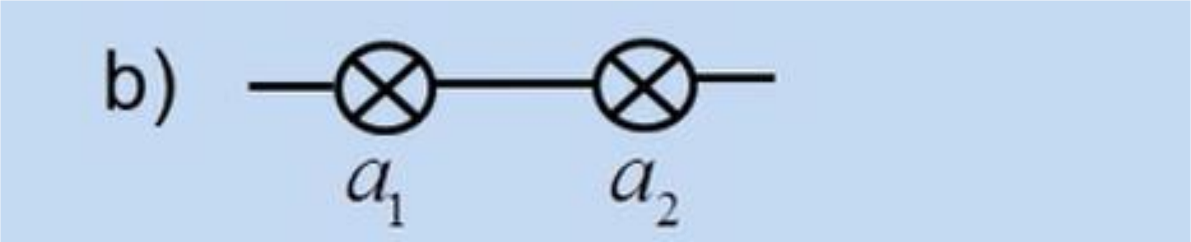
$P(a_1) = 0{,}3, P(a_2) = 0{,}2, P(a_3) = 0{,}5.$ Oblicz prawdopodobieństwo przerwania obwodu.

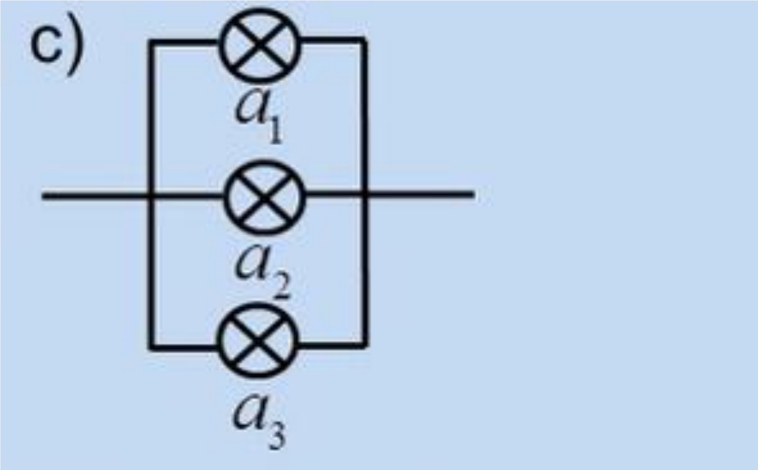


Niezależność zdarzeń– przykłady

4. Wyznacz prawdopodobieństwo przepływu prądu w układach, jeśli prawdopodobieństwa, że popłynie przez nie prąd wynosi: $P(a_1) = 0,75$; $P(a_2) = 0,8$; $P(a_3) = 0,9$.







Schemat Bernoulliego

Definicja (Schemat Bernoullie'go)

Jeżeli przeprowadzimy *n* niezależnych i identycznych doświadczeń, w których są tylko dwa możliwe wyniki, to taki ciąg powtórzeń tego samego doświadczenia nazywamy **schematem Bernoullie'go.**

W schemacie tym jedno ze zdarzeń elementarnych nazywamy **sukcesem**, a drugie **porażką.**

W schemacie ***n*** **prób** Bernoullie'go prawdopodobieństwo $P_n(k)$ otrzymania **dokładnie *k* sukcesów**

wyraża się wzorem: $$\boldsymbol{P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

gdzie $\boldsymbol{p}$**-prawdopodobieństwo sukcesu,** $\boldsymbol{q}$**-prawdopodobieństwo porażki oraz** $\boldsymbol{p+q=1.}$

Schemat Bernoulliego

Przykład. Rzucamy 5 razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

a) 0 razy wyrzucimy orła

b) 1 razy wyrzucimy orła

c) 2 razy wyrzucimy orła

d) 3 razy wyrzucimy orła

e) 4 razy wyrzucimy orła

f) 5 razy wyrzucimy orła

$$\boldsymbol{P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

Schemat Bernoulliego

Przykład.

W urnie jest 15 kul: 10 białych, 5 czarnych. Losujemy 10 razy po jednej kuli,

zwracając za każdym razem wylosowaną kulę do urny.

Oblicz pr-wo wylosowania kuli białej nie mniej niż dwa razy, ale nie więcej niż 4

razy.

$$\boldsymbol{P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

Schemat Bernoulliego

Twierdzenie- (najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów)

- Jeśli liczba $(n+1)p$ jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobne są dwie wartości:

$$\boldsymbol{(n+1)p-1 \;\; oraz \; (n+1)p}$$

- Jeśli liczba $(n+1)p$ nie jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów w schemacie n prób Bernoullie'go, jest to największa liczba całkowita mniejsza od $(n+1)p$, czyli

$[\boldsymbol{(n+1)p}]$ czyt.: całość z $(n+1)p$.

Przykład.

1. Rzucamy 5 razy symetryczna monetą. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba wyrzucenia orła?

Prawdopodobieństwo całkowite

Definicja- prawdopodobieństwo całkowite

Jeżeli

- $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \; = \Omega$
- zdarzenia $B_1, B_{2,} \ldots, B_n$ wykluczają się parami
- $P(B_1) > 0, P(B_2) > 0, \ldots, P(B_n\;) > 0,$

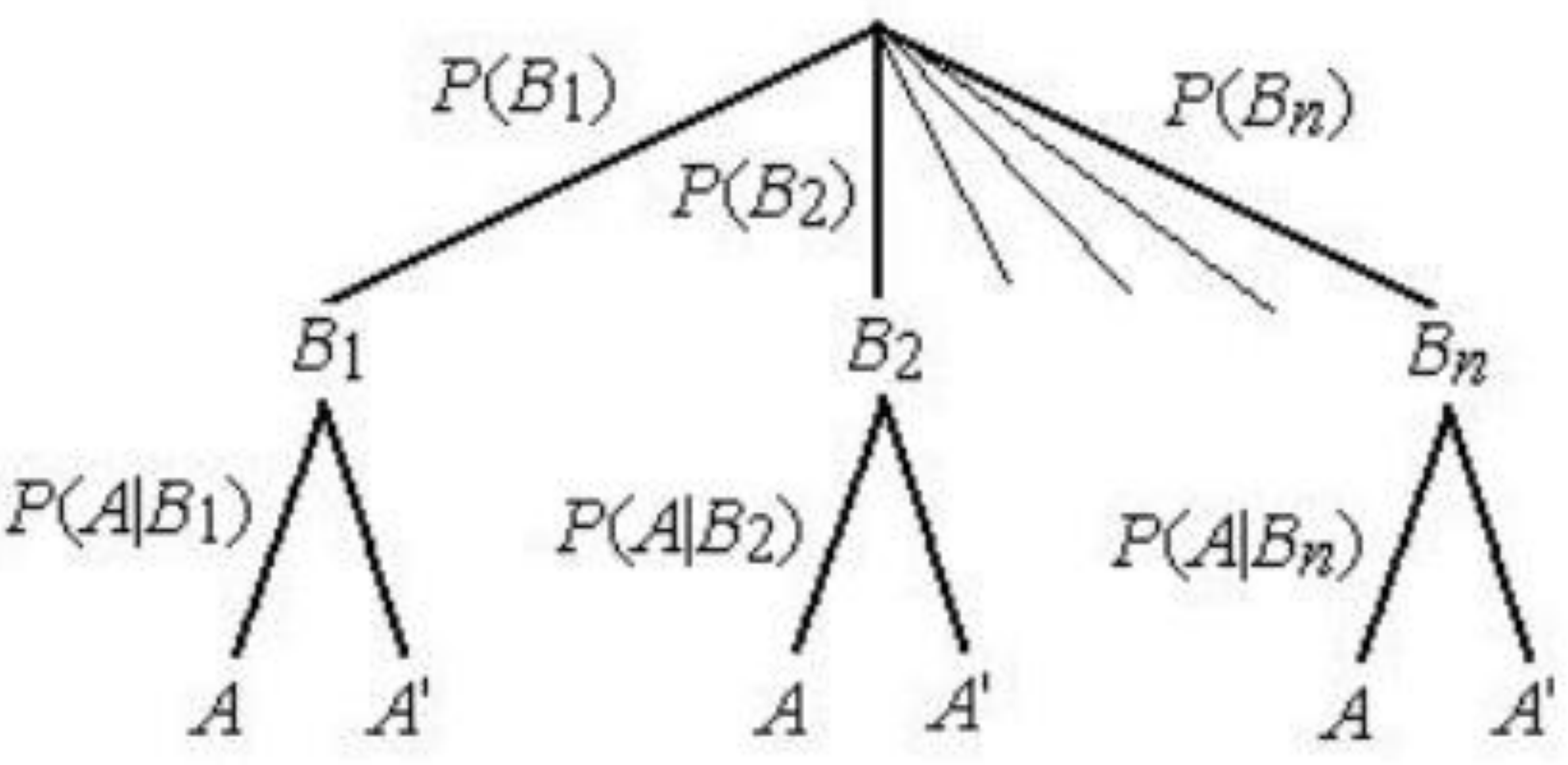
to dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$

$$\boldsymbol{P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A|B_n) \cdot P(B_n).}$$

Wzór powyższy nosi nazwę wzoru na **pr-wo całkowite.**

Prawdopodobieństwo całkowite

Pr-wo można zilustrować za pomocą tzw. drzewa stochastycznego



Prawdopodobieństwo całkowite - przykłady

1. W sklepie są 3 skrzynie z pomarańczami i 2 skrzynie z cytrynami. W każdej skrzyni z pomarańczami znajduje się 3% owoców zepsutych, natomiast w skrzyniach z cytrynami znajduje się 5% owoców zepsutych.

Pobieramy losowo jeden owoc z dowolnej skrzyni.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest zepsuty.

Prawdopodobieństwo całkowite-przykłady

2. Mamy 3 maszyny typu A, 5 maszyn typu B, 2 maszyny typu C.

Każda z nich produkuje tę samą ilość towaru.

Dla maszyny mamy skład:

Dla typu A : 50% wyrobów I gat., 45% wyrobów II gat., resztę stanowią braki.

Dla typu B: 80% I gat., 17% II gat. ,reszta to braki.

Dla typu C: 30% I gat., 69% II gat., 1% to braki.

Pobieramy losowo jedną sztukę towaru.

Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wybrana sztuka jest I gatunku.

Wzór Bayesa

Twierdzenie- Wzór Bayesa

Jeżeli

- $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$
- zdarzenia $B_1, B_{2,} \ldots, B_n$ wykluczają się parami
- $P(B_1) > 0,\ P(B_2) > 0, \ldots, P(B_n) > 0,$

to dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$ zachodzi wzór:

$$\boldsymbol{P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{P(A)}}$$

Twierdzenie Bayesa stosujemy głównie wtedy, gdy znamy wynik doświadczenia i pytamy o jego przebieg.

Wzór Bayesa- przykłady

1. Dane są dwie urny z kulami:

urna A zawierająca 6 czarnych i 9 białych kul

urna B o zawartości 5 czarnych i 15 białych kul.

Wylosowano białą kulę. →

znamy wynik doświadczenia
i pytamy o jego przebieg
Wzór Bayesa

Jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodzi ona z urny A?

$$\boldsymbol{P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{P(A)}}$$

Wzór Bayesa- przykłady

2. W sklepie są 3 skrzynie z pomarańczami i 2 skrzynie z cytrynami.
W każdej skrzyni z pomarańczami znajduje się 3% owoców zepsutych, natomiast w skrzyniach z cytrynami znajduje się 5% owoców zepsutych.

Wybrano owoc zepsuty.

znamy wynik doświadczenia i pytamy o jego przebieg
Wzór Bayesa

Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to pomarańcza?

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{P(A)}$$

Wzór Bayesa- przykłady

3. Mamy 3 maszyny typu A, 5 maszyn typu B, 2 maszyny typu C.

Każda z nich produkuje tę samą ilość towaru.

Dla maszyny typu A mamy: 50% wyrobów I gat., 45% wyrobów II gat., resztę stanowią braki.

Dla typu B: 80% I gat., 17% II gat.,reszta braki.

Dla typu C: 30% I gat., 69% II gat., 1% braki.

Pobieramy losowo sztukę I gatunku →

znamy wynik doświadczenia
i pytamy o jego przebieg
Wzór Bayesa

Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że to maszyna typu A.

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{P(A)}$$